2019 USA TSTST P2

Doubt Yourself

André Pinheiro

Outubro de 2023

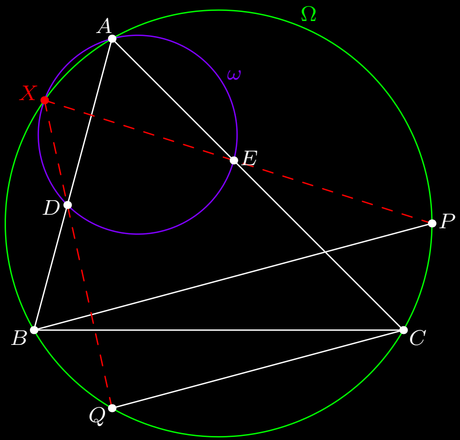
2019 USA TSTST P2

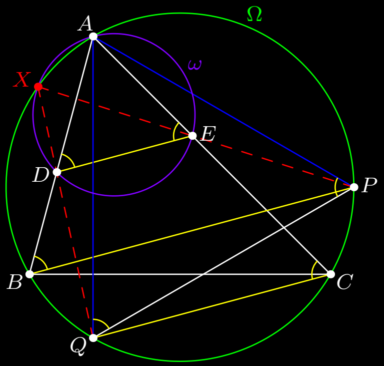
Seja ABC um triângulo acutângulo com circuncirculo Ω e ortocentro H. Pontos D e E pertecem aos segmentos AB e AC respetivamente, tal que $AD = AE$. As retas que passam por B e C paralelas a DE intersetam Ω em P e Q, respetivamente. Denote por ω o circuncirculo do $\triangle ADE$.

a) Prove que as retas PE e QD intersetam-se em ω.

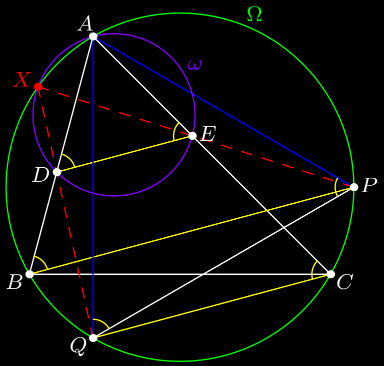
b) Prove que se ω passa por H, então as retas PD e QE intersetam-se em ω também.

Parte a)





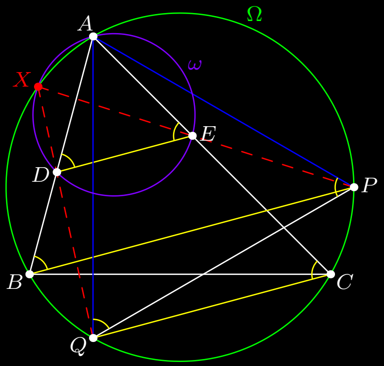
Seja $X = DQ \cap EP$. Vamos provar que $X \in \omega$.



Seja $X = DQ \cap EP$. Vamos provar que $X \in \omega$.

Como $DE//BP \Rightarrow \angle ADE = \angle ABP$ e $DE//QC \Rightarrow \angle AED = \angle ACQ$, então

$\angle AQP = \angle ABP = \angle ADE = \angle ACQ = \angle APQ$.

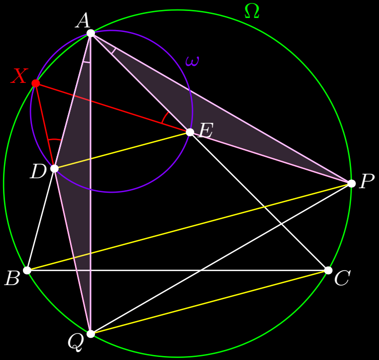


Seja $X = DQ \cap EP$. Vamos provar que $X \in \omega$.

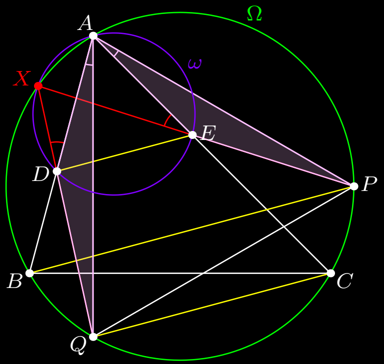
Como
$DE//BP \Rightarrow \angle ADE = \angle ABP$ e
$DE//QC \Rightarrow \angle AED = \angle ACQ$,
então

$\angle AQP = \angle ABP = \angle ADE = \angle ACQ = \angle APQ$.

Assim, $\angle QAP = \angle BAC \Rightarrow \angle BAQ = \angle BAC$ e $AQ = AP$.



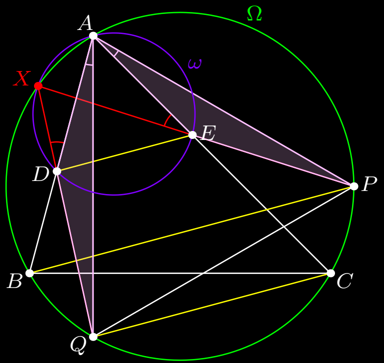
Como $AD = AE$, $AQ = AP$ e $\angle QAP = \angle BAC$, então $\triangle ADQ \equiv \triangle AEP$ pelo critério LAL.



Como $AD = AE$, $AQ = AP$ e $\angle QAP = \angle BAC$, então $\triangle ADQ \equiv \triangle AEP$ pelo critério LAL.

Sendo assim, temos

$$\angle XDA = \angle XEA,$$



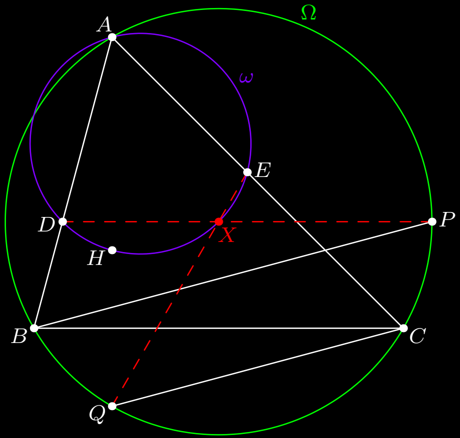
Como $AD = AE$, $AQ = AP$ e $\angle QAP = \angle BAC$, então $\triangle ADQ \equiv \triangle AEP$ pelo critério LAL.

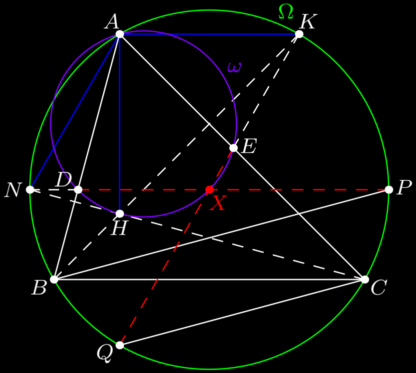
Sendo assim, temos

$$\angle XDA = \angle XEA,$$

ou seja, $X \in \omega$. $\blacksquare$

Parte b)

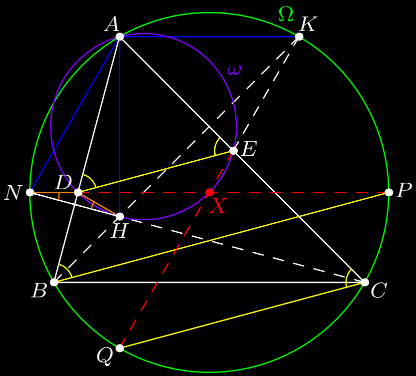




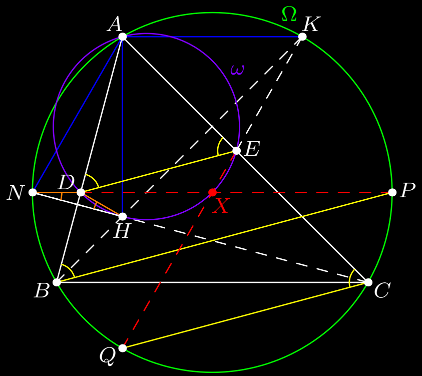
Seja $X = QE \cap DP$.

Como temos o ortocentro presente, podemos trabalhar com reflexões! Seja N a reflexão de H na reta BA e K a reflexão de H na reta AC.

Parece que N, D, X são colineares e X, E, K também são, vamos tentar provar!



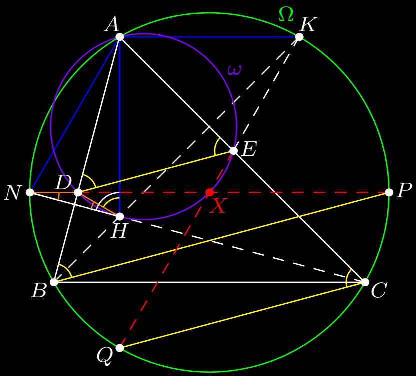
Lema 1: N, D, P são colineares.



Lema 1: N, D, P são colineares.

Prova. Por angle chasing, temos

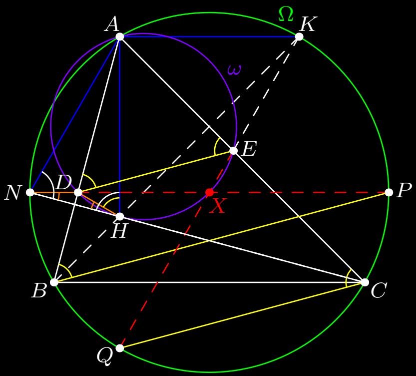
$$\angle DNH = \angle DHN$$



Lema 1: N, D, P são colineares.

Prova. Por angle chasing, temos

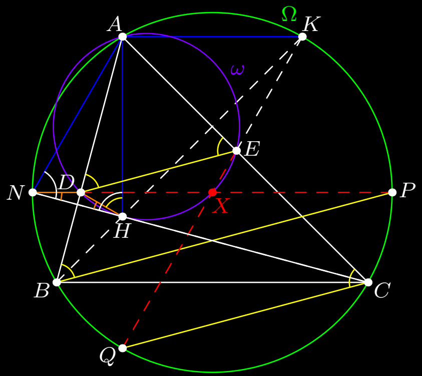
$$\angle DNH = \angle DHN = \angle AHN - \angle AHD$$



Lema 1: N, D, P são colineares.

Prova. Por angle chasing, temos

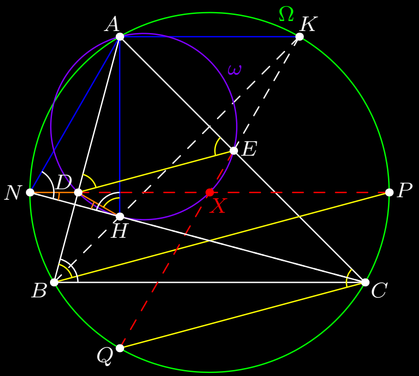
$\angle DNH = \angle DHN = \angle AHN - \angle AHD = \angle ANH - \angle AED$



Lema 1: N, D, P são colineares.

Prova. Por angle chasing, temos

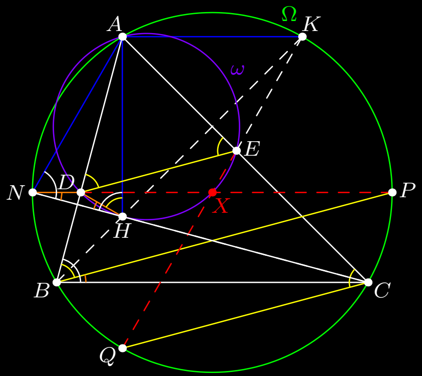
$\angle DNH = \angle DHN = \angle AHN - \angle AHD = \angle ANH - \angle AED = \angle ANC - \angle ADE$



Lema 1: N, D, P são colineares.

Prova. Por angle chasing, temos

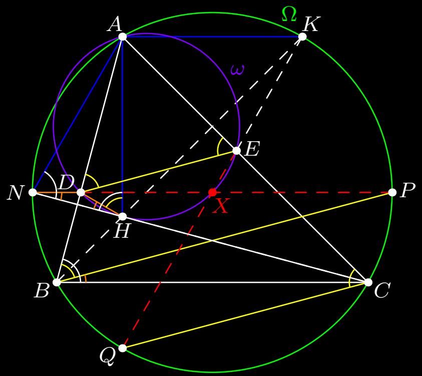
$$\angle DNH = \angle DHN = \angle AHN - \angle AHD = \angle ANH - \angle AED = \angle ANC - \angle ADE = \angle ABC - \angle ABP$$



Lema 1: N, D, P são colineares.

Prova. Por angle chasing, temos

$\angle DNH = \angle DHN = \angle AHN - \angle AHD = \angle ANH - \angle AED = \angle ANC - \angle ADE = \angle ABC - \angle ABP = \angle PBC$

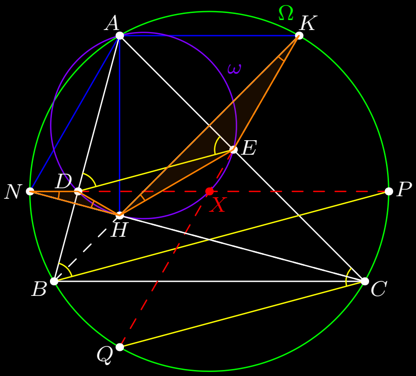


Lema 1: N, D, P são colineares.

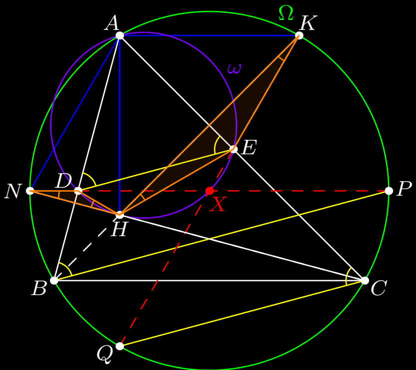
Prova. Por angle chasing, temos

$\angle DNH = \angle DHN = \angle AHN - \angle AHD = \angle ANH - \angle AED = \angle ANC - \angle ADE = \angle ABC - \angle ABP = \angle PBC = \angle PNC$.

E assim está mostrado. ■

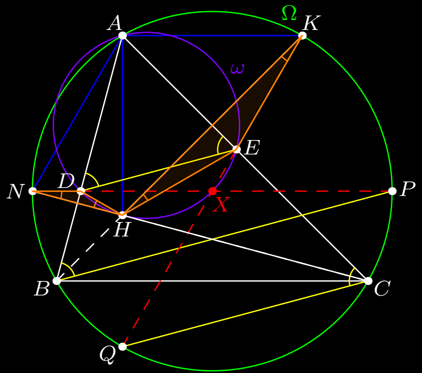


Lema 2: Q, E, K são colineares.



Lema 2: Q, E, K são colineares.

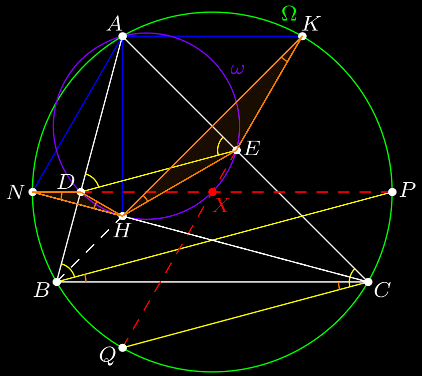
Prova. Repare que $\angle BDH = \angle AEH \Rightarrow \angle NDH = \angle HEK$ e $ND = DH$ e $HE = EK$, então pelo critério LAL, $\triangle NDH \sim \triangle HEK$.



Lema 2: Q, E, K são colineares.

Prova. Repare que $\angle BDH = \angle AEH \Rightarrow \angle NDH = \angle HEK$ e $ND = DH$ e $HE = EK$, então pelo critério LAL, $\triangle NDH \sim \triangle HEK$.

Assim, $\angle DNH = \angle HKE$.

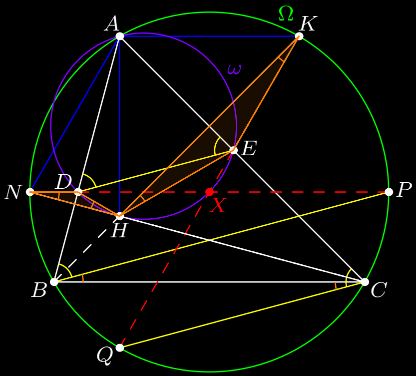


Lema 2: Q, E, K são colineares.

Prova. Repare que $\angle BDH = \angle AEH \Rightarrow \angle NDH = \angle HEK$ e $ND = DH$ e $HE = EK$, então pelo critério LAL, $\triangle NDH \sim \triangle HEK$.

Assim, $\angle DNH = \angle HKE$.

Pelo lema 1, temos então que $\angle DNH = \angle PNC = \angle PBC = \angle BCQ = \angle BKQ$.



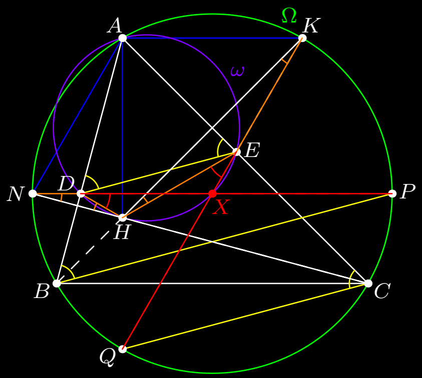
Lema 2: Q, E, K são colineares.

Prova. Repare que $\angle BDH = \angle AEH \Rightarrow \angle NDH = \angle HEK$ e $ND = DH$ e $HE = EK$, então pelo critério LAL, $\triangle NDH \sim \triangle HEK$.

Assim, $\angle DNH = \angle HKE$.

Pelo lema 1, temos então que $\angle DNH = \angle PNC = \angle PBC = \angle BCQ = \angle BKQ$.

Ou seja, $\angle HKE = \angle BKQ$ e assim está mostrado. ■



Pelo lema 1 e 2, podemos concluir que $\angle HDP = \angle HEQ$.

Portanto, $X \in \omega$ e assim está mostrado. $\blacksquare$